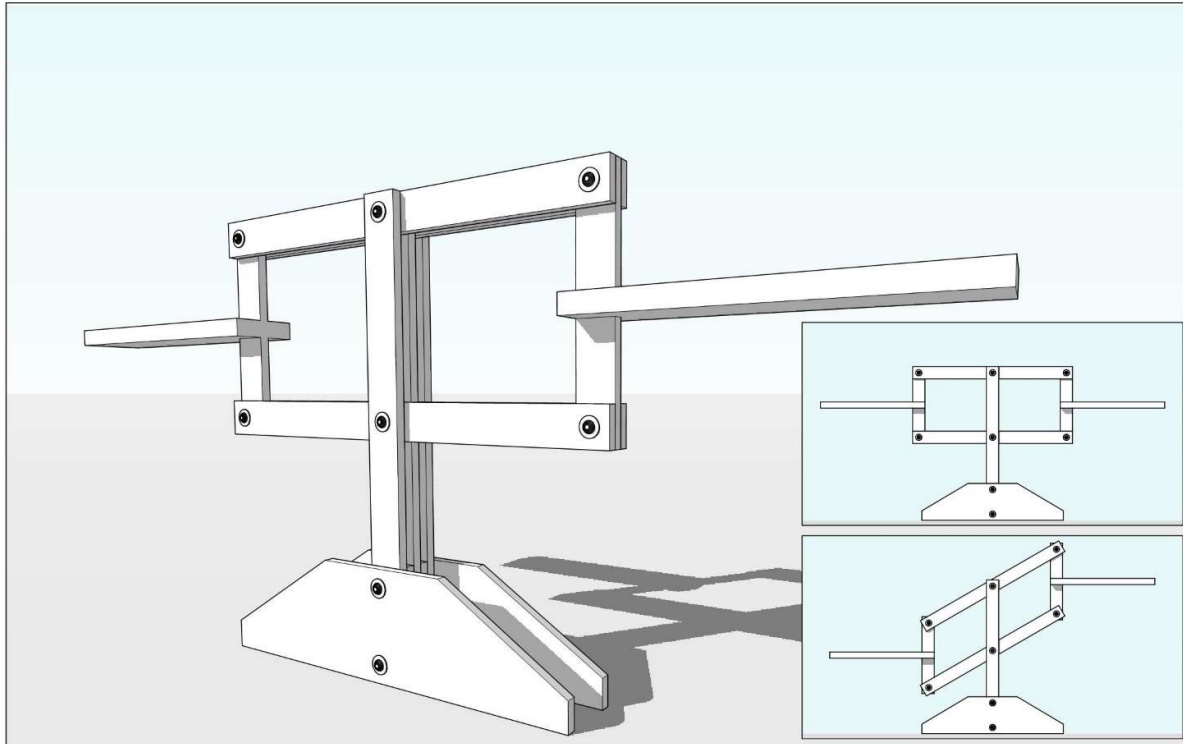


# The Roberval Balance



בית המדרש 'נקודת ארכימדס' ומרכז אחר"ת למורים חוקרים בפיזיקה, אפריל 2020

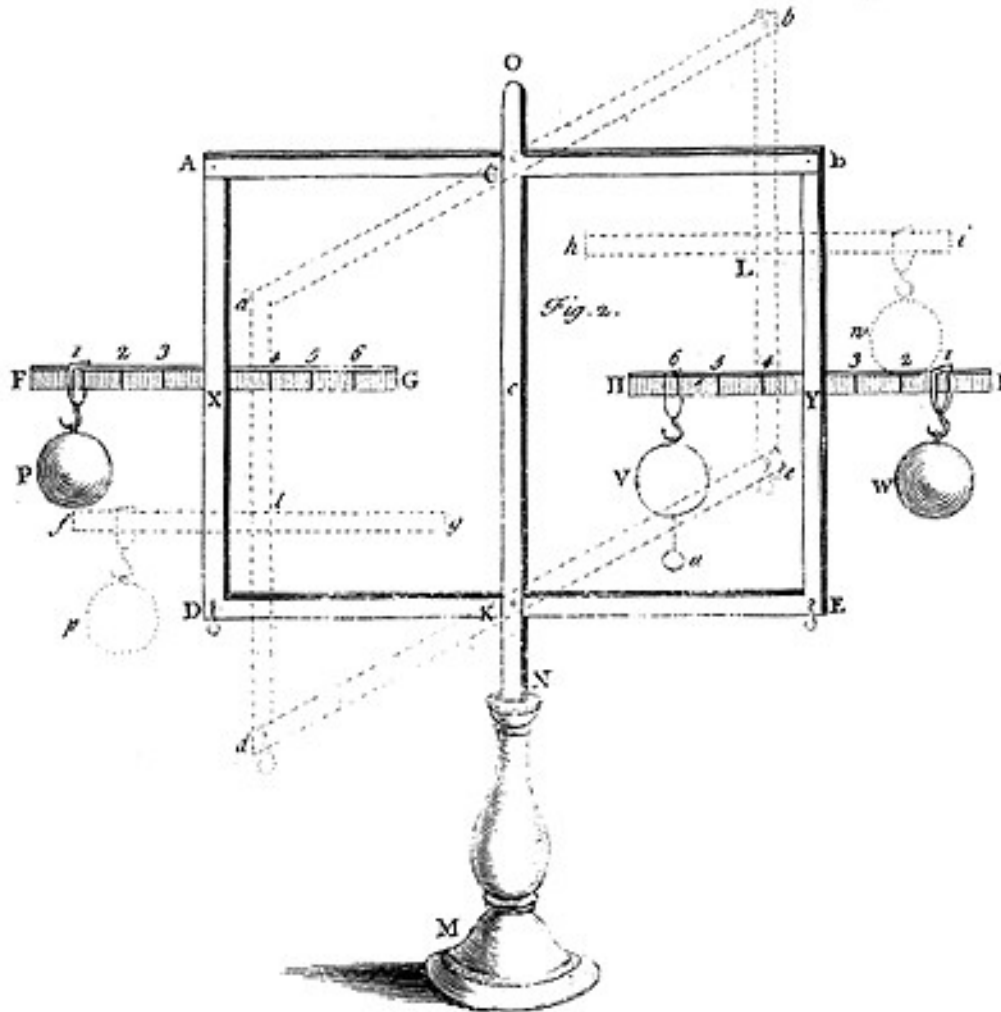
יריב פרטוש

## **דברי תודה**

תודה מיוחדת ליפתח נבות שסייע בעריכת העבודה.

## 1. הקדמה

"מאזני רוברוואל" הינם מאזני שקילה שהוצגו לראשונה לאקדמיה הצרפתית למדע ב - 1669 ע"י ממציאם שגם היה מתמטיקאי צרפתי - ז'יל פֶּרְסוֹן דה רוברוואל.



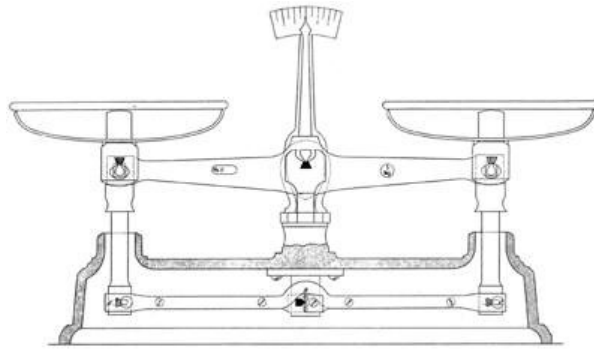
תמונה 1 – מאזני רוברוואל עתיקות

ז'יל פֶּרְסוֹן דה רוברוואל (10 באוגוסט 1602 - 27 באוקטובר 1675)

ז'יל פֶּרְסוֹן דה רוברוואל, בצרפתית - Gilles Personne de Roberval. היה מתמטיקאי צרפתי שחקר בעיות באנליזה מתמטית, שפיתח שיטה לחישוב שטח של משטחים ונפח של גופים תלת-ממדיים, וקרא לה "שיטת ה-Indivisibles". השיטה התייתרה לחלוטין בתוך כמה עשרות שנים, כאשר המציאו לייבניץ וניוטון את החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

רוברוואל האמין שכל שני חלקיקי חומר ביקום מושכים זה את זה, והיה אחד מן המתמטיקאים שהשפיעו יותר מכל על אייזיק בארו, שהיה לימים מורו של אייזיק ניוטון, שהביא עיקרון זה למיצוי במסגרת חוק המשיכה האוניברסלי.

## 2. אופן הפעולה של המאזניים

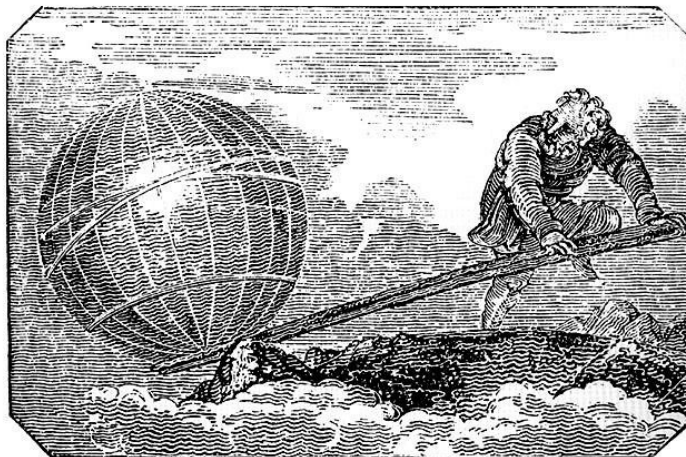


תמונה 2 – מכשיר שקילה עתיק שבו מיושם העיקרון של מאזני רוברואל

את האובייקט שנרצה לשקול מניחים על צלחת אחת, ובשנייה מניחים משקולת (שמשקלה ידוע מראש) ובמידת הצורך מחסירים או מוסיפים משקולות עד שמגיעים למצב שבו שתי הצלחות אינן נעות. במצב זה, משקל האובייקט שווה למשקל הכולל של המשקולות, ללא קשר למיקומם בתוך הצלחות בהן הונחו. (תמונה 02)

## 3. המבנה ועקרון הפעולה של המאזניים

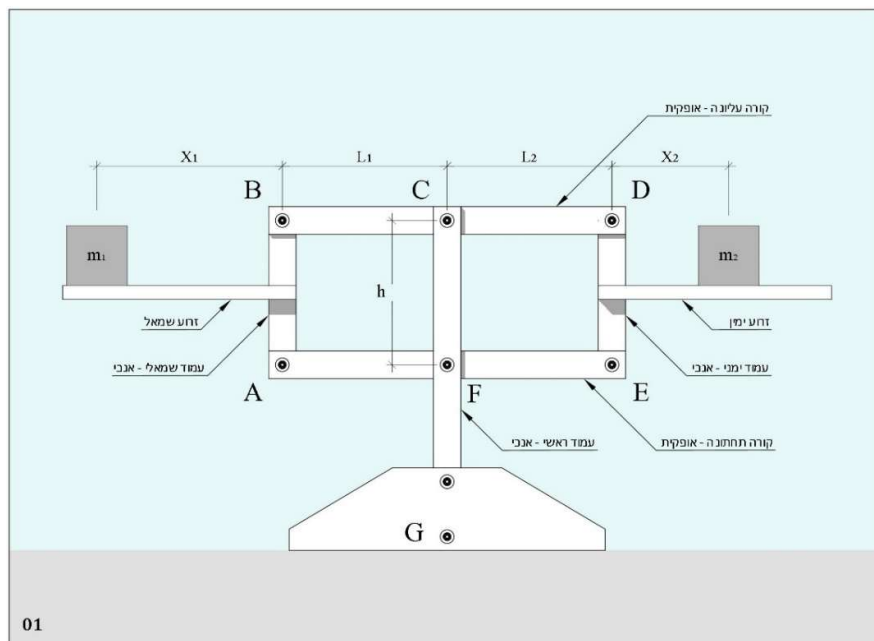
עקרון הפעולה הפיזיקלי של מאזני רוברואל מסתמך ביסודו על אחת מן המכונות הפשוטות הקלאסיות – המנוף, של ארכימדס.



תמונה 3 – "תנו לי נקודת אחיזה ואוכל להזיז את העולם" (ארכימדס)

המנוף מקטין את הכוח הנדרש לביצוע עבודה על חשבון הארכת ההעתק ("הדרך") שהכוח פועל לאורכו - שהוא עקרון היתרון המכני.

המאזניים מורכבים משתי קורות אופקיות (אך עם אפשרות הטיה) המחוברות במרכזן, אחת מעל השנייה, לבסיס יציב. שתי קורות אנכיות מחברות את הקצוות של הקורות האופקיות, כפי שמתואר בציור. בסך הכול יש שש נקודות חיבור כאשר כל נקודת חיבור היא ציר. הציורים מאפשרים שינוי של הזוויות, כך שמתקבלת מקבילית עם זוויות משתנות. כפות המאזניים מחוברות בחיבור קשיח אל הקורות האנכיות משני צדי המקבילי, כך שניתן יהיה להניח עליהן עצמים, כפי שמתואר בציור. נשים לב שכאשר משנים את הזווית של המקבילית, הקורות האופקיות כבר אינן אופקיות, אבל הקורות האנכיות נשארות אנכיות. (ראו תרשים 2)



תרשים 1 – תיאור של המאזניים וחלקיה

## 4. חישוב תנאי שיווי המשקל של המאזניים לפי שיקולי אנרגיה

אנחנו רוצים להבין מהם התנאים שבהם כפות המאזניים מאוזנות ונמצאות בשיווי משקל.

תנאי שיווי משקל הם:

א. סכום כוחות אפס על כל אחד ממרכיבי המאזניים.

ב. סכום מומנטים אפס על כל אחד ממרכיבי המאזניים.

נתבונן בתרשים 01 המגדיר את הממדים של חלקי המאזניים :

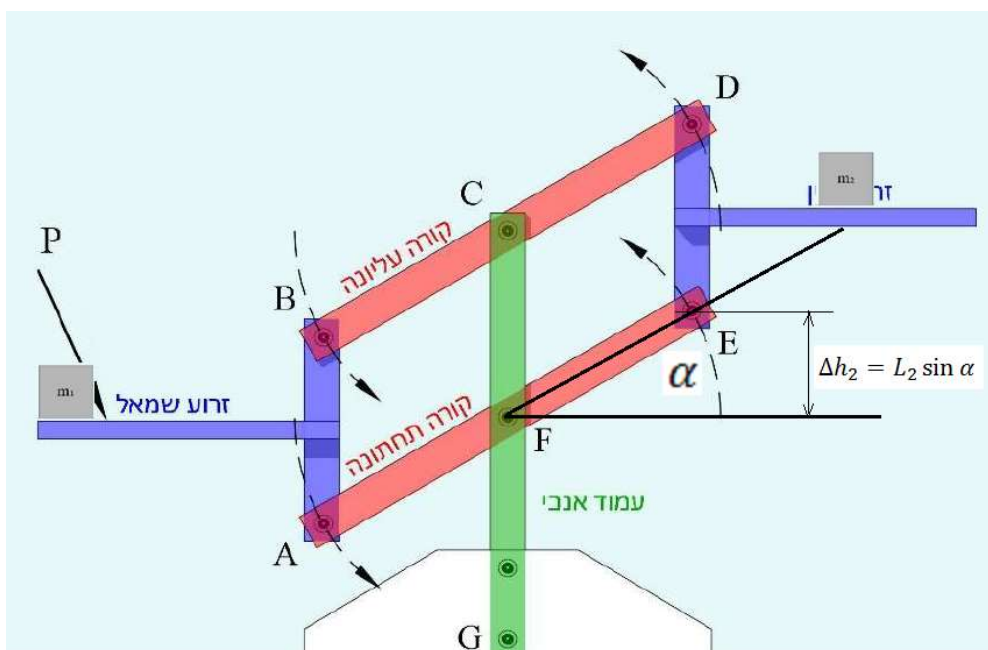
מכיוון שהנקודות A, B, C, D, E, F הן נקודות ציר, המרחקים ביניהן נשמרים, אבל הזוויות יכולות להשתנות. מכיוון שהמרחקים נשמרים, המרובע ABDE נשאר מקבילי. הצלעות האנכיות נשארות אנכיות כי הן מקבילות לצלע CF המקובעת לבסיס.

**מסקנה:** אפשר לתאר את מצב המאזניים על ידי דרגת חופש יחידה, כמו למשל הזווית  $\alpha$  המתארת את הנטייה של הצלעות "האופקיות" ביחס לציר X.

בהמשך נציג את האנרגיה הפוטנציאלית של המאזניים כתלות בזווית ההטיה  $\alpha$ .

**טענה:** תנאי שיווי המשקל (סעיפים א' ו ב' למעלה) שקולים לתנאים לקבלת נקודת קיצון של האנרגיה הפוטנציאלית.

**הסבר:** השינוי באנרגיה הפוטנציאלית בתזוזה קטנה שווה לסך כול העבודה המבוצעת על ידי הכוחות והמומנטים הפועלים על המאזניים. למעשה, כבר בהצגת מצב המאזניים על ידי הפרמטר היחיד של הזווית, מובלעת הדרישה של סכום כוחות אפס. הכוח הנורמלי הפועל על בסיס המאזניים מאזן את כוח הכובד כך שהמאזניים לא נופלים, והציר המרכזי של המאזניים קבוע במקומו. לכן, השינוי באנרגיה הפוטנציאלית בעקבות שינוי קטן של הזווית שווה לעבודה המבוצעת על ידי המומנטים. כלומר, הוא שווה לסכום המומנטים כפול השינוי בזווית. בפרט, התנאי של נקודת קיצון (נגזרת אפס) של האנרגיה הפוטנציאלית שקול לתנאי של סכום מומנטים אפס.



תרשים 2: המאזניים בהטיה בזווית  $\alpha$

### האנרגיה הפוטנציאלית:

נחשב את האנרגיה הפוטנציאלית כתלות בזווית הנטייה  $\alpha$ , כאשר נקודת הייחוס היא בזווית נטייה אפס. נניח שהמבנה של המאזניים סימטרי ביחס לציר הבסיס המרכזי. כאשר צד אחד עולה הצד השני יורד באותה מידה ולכן חלקי המאזניים לא משפיעים על האנרגיה הפוטנציאלית.

כפי שרואים בשרטוט, כאשר מטים את זרועות המאזניים בזווית  $\alpha$ , שינויי הגובה של המסה משמאל ( $m_1$ ) ושל המסה מימין ( $m_2$ ) נתונים על ידי:

$$\Delta h_1 = -L_1 \sin \alpha$$

$$\Delta h_2 = L_2 \sin \alpha$$

ומכאן, האנרגיה הפוטנציאלית נתונה על ידי:

$$E_p(\alpha) = m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2 = (m_2 L_2 - m_1 L_1) \cdot \sin \alpha$$

נשים לב שהאנרגיה הפוטנציאלית אינה תלויה כלל במרחקי ההנחה של המשקולות על כפות המאזניים ( $x_1, x_2$ ) בתרשים 1 למעלה).

**לפי הטענה למעלה**, מצב שוויו משקל מתקבל בזווית שבה הנגזרת של האנרגיה הפוטנציאלית מתאפסת. בנקודת מינימום מתקבל שיווי משקל יציב, בנקודת מקסימום מתקבל שיווי משקל רופף. אם האנרגיה הפוטנציאלית היא קבועה אז מתקבל שיווי משקל אדיש.

### מסקנה 1: אם מתקיים:

$$m_2 L_2 - m_1 L_1 = 0$$

אז האנרגיה הפוטנציאלית קבועה (0) ומתקבל שיווי משקל אדיש.  
אם וכאשר  $L_1 = L_2$  (כפי שהנחנו), התנאי הזה אומר ש:  $m_1 = m_2$ .

## מסקנה 2: אם מתקיים:

$$m_2 L_2 - m_1 L_1 > 0$$

אז מתקבל שיווי משקל יציב כאשר הזווית היא  $\alpha = -90^\circ$ , כי אז יש מינימום של  $\sin \alpha$ , ומתקבל שיווי משקל רופף כאשר הזווית היא  $\alpha = 90^\circ$ , כי אז יש מקסימום של  $\sin \alpha$ .

## 5. סיכום

א. ראינו שמתקבל שיווי משקל כאשר המשקולות מימין ומשמאל שוות זו לזו.

ב. ראינו ששיווי המשקל לא תלוי במיקום ההנחה של המשקולות על כפות המאזניים.

ג. אפשר להראות ששינוי המיקום של הנחת המשקולות על כפות המאזניים, למרות שאינו משפיע על תנאי שיווי המשקל, הוא בהחלט משפיע על המאמצים הפועלים הצירים ויכול לגרום למומנט שמנסה להטות את המוט האנכי המרכזי. (אם כי, כל זמן שמבנה המאזניים לא קורס, המוט לא נוטה מכיוון שהוא מקובע לבסיס). ראו הסבר מפורט בנספח.

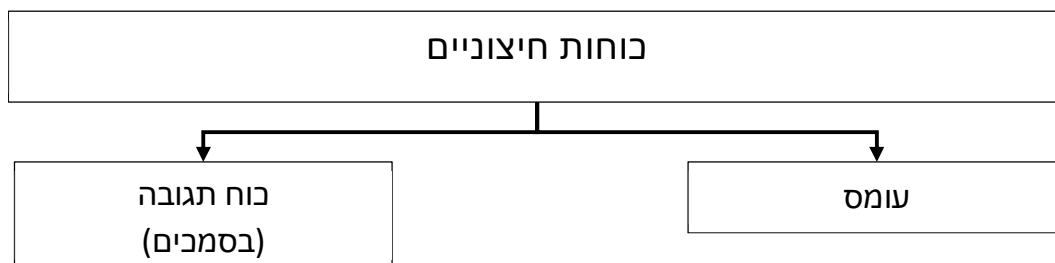
## 6. נספח: חישוב הכוחות והמומנטים הפועלים על המאזניים

### 6.1 כוחות חיצוניים על המבנה

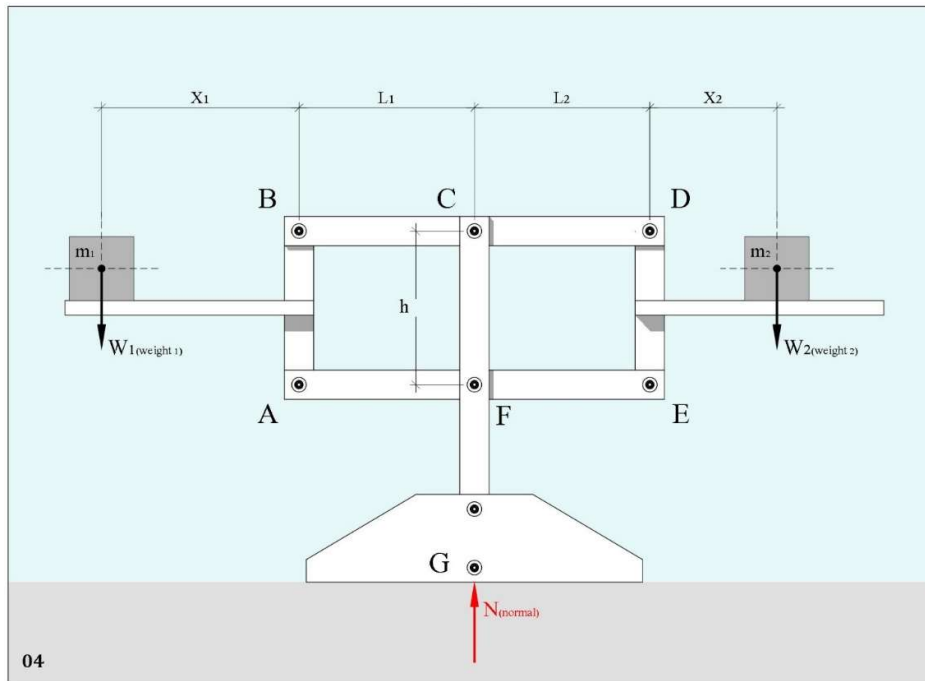
ניתוח מבנים מתחיל, בדרך כלל, בהבנה של הכוחות החיצוניים שפועלים עליו, ולהבדיל משיווי משקל של גוף קשיח יחיד, יש צורך בהבנת הכוחות הפנימיים במבנה - כוחות הפעולה והתגובה בין אלמנטים שמחוברים זה לזה, בהם נדון בהמשך.

כוחות חיצוניים מתחלקים לשני סוגים:

1. כוחות מופעלים - Applied Forces, או עומסים - Loads.
2. כוחות תגובה - Reaction Forces, כוחות הנוצרים בנקודות התמיכה (הסמך)/בבסיס המבנה כתוצאה/כתגובה לעומס הפועל על המבנה.



על המאזניים שלנו פועלים שני כוחות חיצוניים שהם עומסים המופעלים על הזרועות ע"י המסות  $m_1$  ו  $m_2$ . כתוצאה ממשקלן של המסות שסימונם -  $W_{1(weiht 1)}$ ,  $W_{2(weiht 2)}$  (תרשים 04). בנוסף, קיים גם כוח חיצוני הנוצר בבסיס המאזניים שהוא כוח תגובה לעומס הפועל על המאזניים וסימונו -  $N_{(normal)}$ . (תרשים 04)



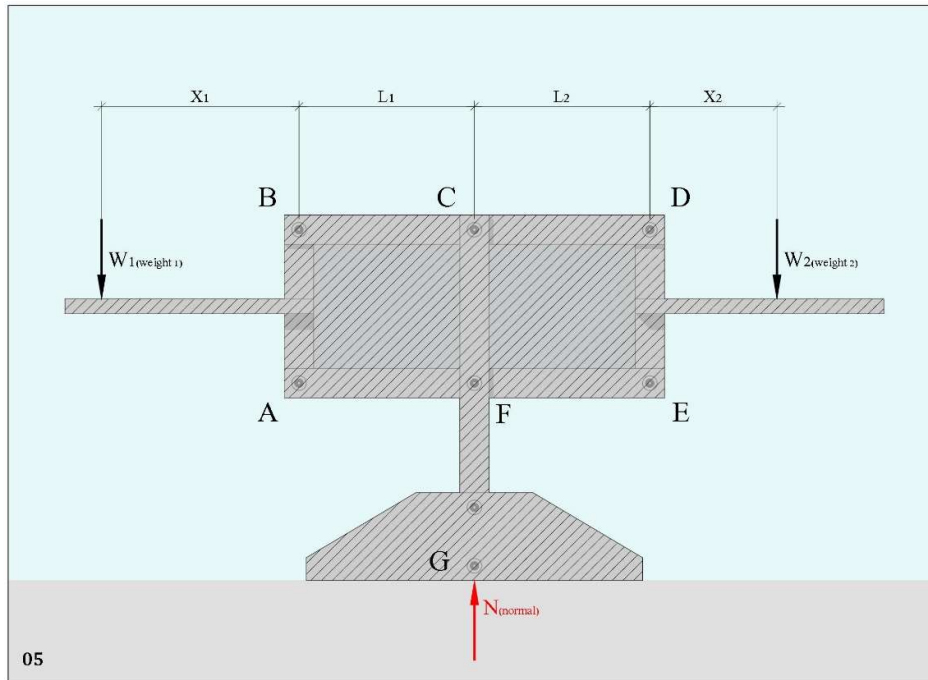
תרשים 04 – כוחות חיצוניים שפועלים על המבנה

**הערה :** כל החישובים בעבודה זו בוצעו על פי ההנחות הבאות :

1. המרחק האנכי שבין כל זוג צירים חייב להיות קבוע.
2. משני צדי המאזניים יהיו זרועות שלכל אחת שתי נקודות משען על זוג של צירים, ומשקל הזרועות שווה.
3. כל הקורות יהיו קשיחות ובעלות צפיפות חומר אחידה.
4. המאזניים נמצאות בשדה גרביטציוני אחיד.
5. המאזניים מונחות על משטח חלק וללא חיכוך.
6. בחישוב מזניחים את המסה של חלקי המאזניים. ההנחה הזאת, גם אם אינה נכונה מבחינה פיזיקלית, היא סבירה בהחלט בהקשר של הבנת המנגנון. גם ככה החישוב די ארוך ומסובך, ואפשר להבין שההנחה הזאת לא פוגעת בעקרון המרכזי ובהבהרת ההשפעה (או אי ההשפעה) של המיקום של המשקולות על כפות המאזניים.
7. נבחרה מערכת צירים כך שציר X הוא הציר האופקי וציר Y הוא הציר האנכי.
8. סכום מומנטים יסומן באופן הבא :  $\sum \vec{M}_F = 0$ , כאשר האות F מסמלת את ציר הייחוס סביבו מחושב המומנט, והחץ  $\odot$  מסמן את הכיוון החיובי של המומנט. כך שכיוון מומנט חיובי הוא נגד כיוון השעון (C.C.W) וכיוון מומנט שלילי הוא עם כיוון השעון (C.W).



### 6.1.1. נשרטט דיאגרמת גוף חופשי (ד.ג.ח.) חיצונית של כל המבנה לצורך מציאת ביטוי לכוחות החיצוניים :



תרשים 05 – ד.ג.ח. חיצונית של כל המבנה

כעת, נרשום את משוואות שיווי המשקל הרלוונטיות ל- ד.ג.ח. זהו :

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + \vec{N} = -W_1 - W_2 + N$$

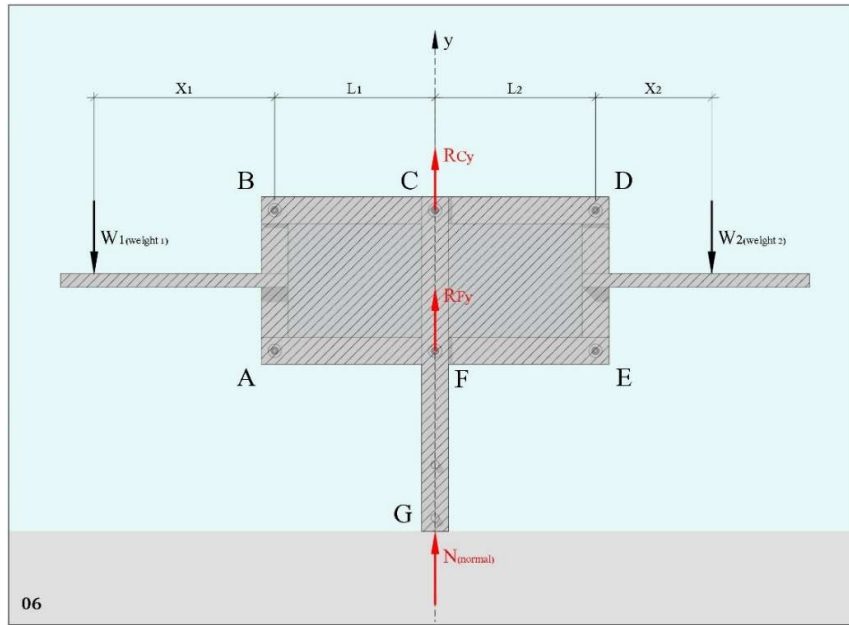


$$\langle 1 \rangle N = W_1 + W_2$$

על פי הנחות קודמות (ראה-הערה) ובהעדר כוחות חיצוניים הפועלים על המבנה בכיוון ציר x ניתן להניח ש :  $\sum \vec{F}_x = 0$

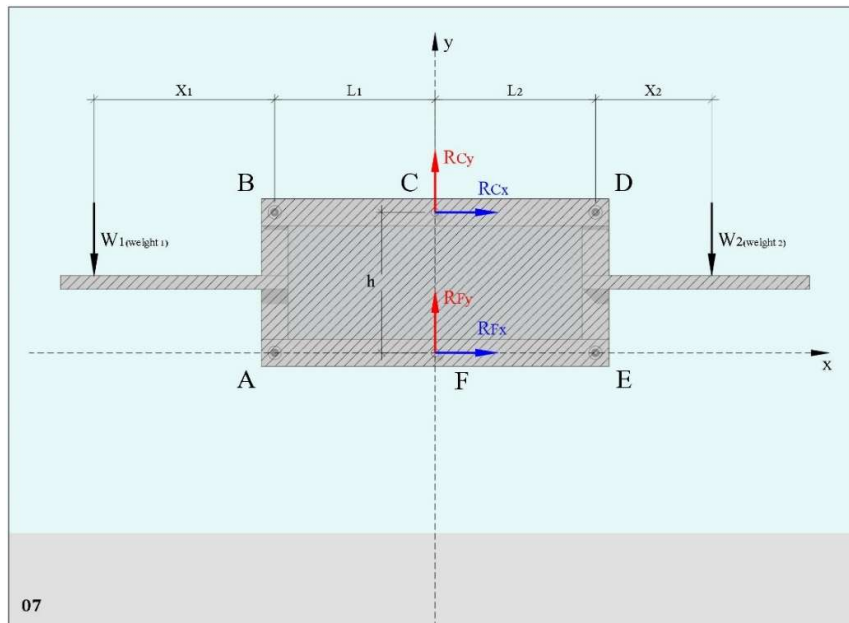
## 6.2. כוחות פנימיים במבנה

6.2.1. נשרטט דיאגרמת גוף חופשי (ד.ג.ח.) ללא הבסיס, בהנחה שהריאקציה בנקודה G מועברת במלואה אל העמוד האנכי שמחובר אל שתי הקורות האופקיות של המאזניים דרך הצירים C ו F :



תרשים 06 – ד.ג.ח. מהלך כוחות לאורכו של העמוד הראשי

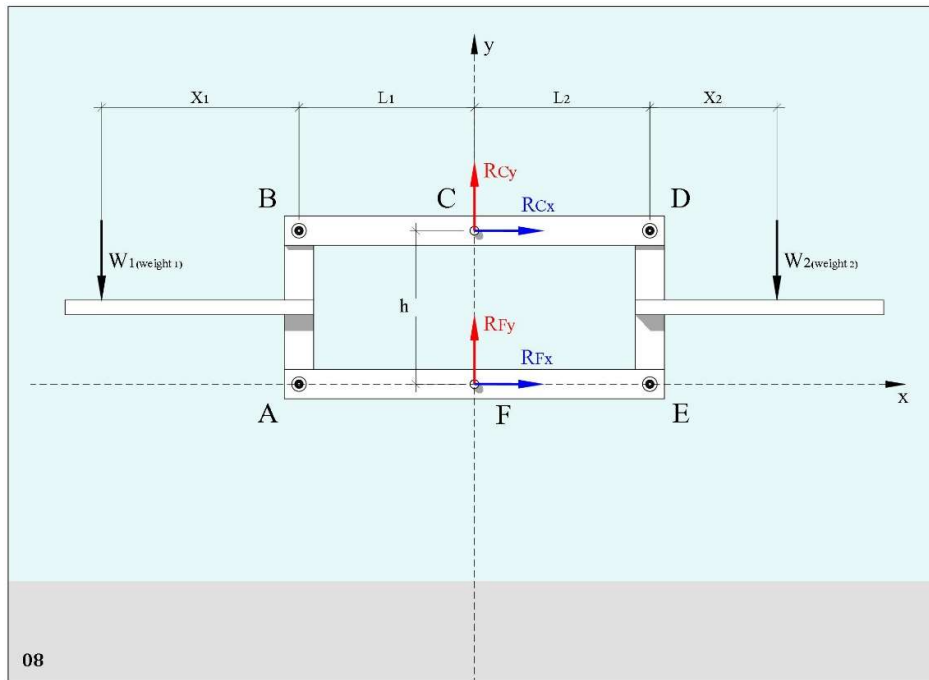
**6.2.2.** העמוד הראשי מעביר את הכוחות  $R_{Cy}$  ו  $R_{Fy}$  אל הצירים C ו F , והצירים יכולים להעביר את הכוחות גם בכיוון ציר x וגם בכיוון ציר y . נשרטט דיאגרמת גוף חופשי (ד.ג.ח.) בהתאם :



תרשים 07 – ד.ג.ח. הכוחות שהצירים C ו F מעבירים

למידה באמצעות פרויקטים – הצעה לניסוי בפיזיקה

הצירים F ו C מעבירים את הכוחות  $R_{Fy}$  ו  $R_{Cy}$  אל הקורות האופקיות של המאזניים :



תרשים 08 – ת.ג.ח. הכוחות שהצירים F ו C מעבירים

בעת, נרשום את משוואות שיווי המשקל הרלוונטיות ל- ד.ג.ח. אלו :

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_x = \vec{R}_{Cx} + \vec{R}_{Fx} = R_{Cx} + R_{Fx}$$

$$\langle 2 \rangle R_{Cx} = -R_{Fx}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + \vec{R}_{Cy} + \vec{R}_{Fy} = -W_1 - W_2 + R_{Cy} + R_{Fy}$$

$$\langle 3 \rangle R_{Cy} + R_{Fy} = W_1 + W_2$$

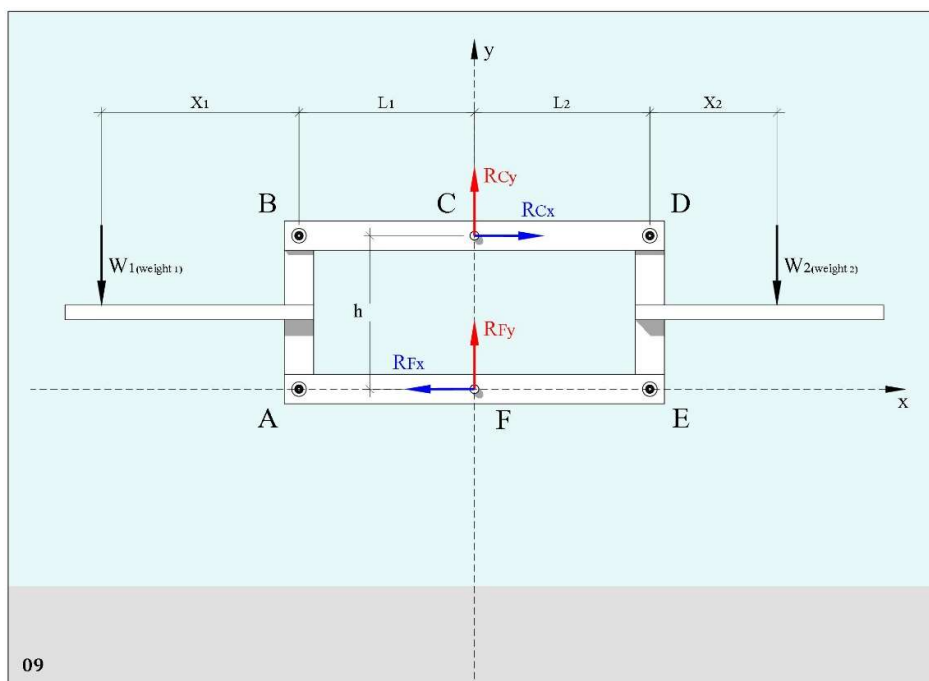
$$\odot \sum \vec{M}_F = 0$$

$$\odot \sum \vec{M}_F = \vec{M}_{W_1} + \vec{M}_{W_2} + \vec{M}_{R_{Cx}} = W_1 \cdot (X_1 + L_1) - W_2 \cdot (X_2 + L_2) - R_{Cx} \cdot h$$

$$W_1 \cdot (X_1 + L_1) - W_2 \cdot (X_2 + L_2) - R_{Cx} \cdot h = 0$$

$$\langle 4 \rangle W_1 \cdot (X_1 + L_1) - R_{Cx} \cdot h = W_2 \cdot (X_2 + L_2)$$

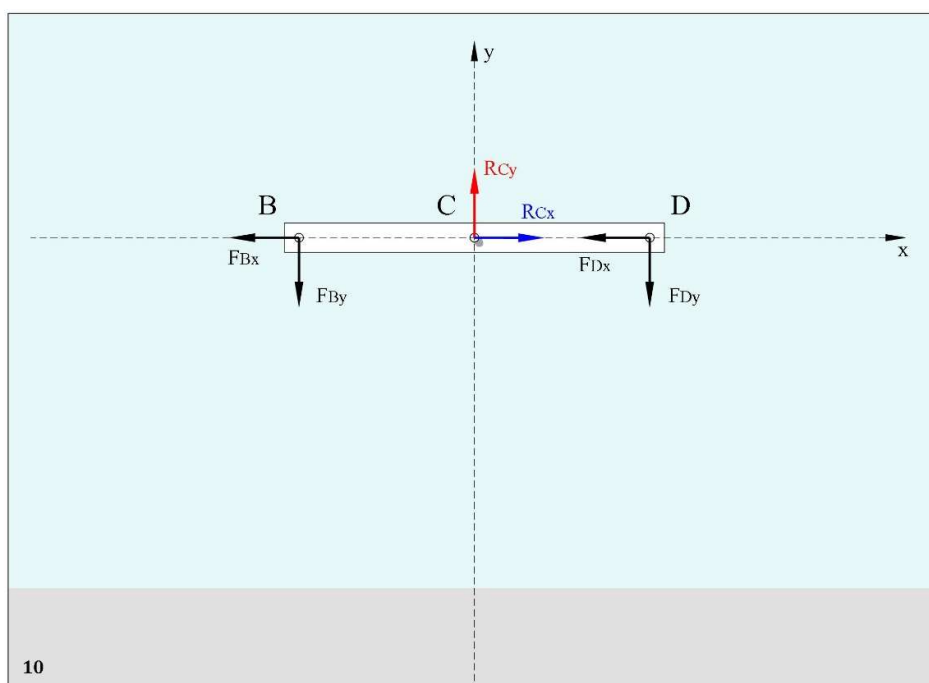
נתקן את ד.ג.ח. בהתאם למה שמצאנו ב- <2> :



תרשים 09 – ד.ג.ח. עדכון כיוון הכוחות שהצירים  $F$  ו  $C$  מעבירים

### 6.2.3. נשרטט דיאגרמת גוף חופשי (ד.ג.ח.) של שתי הקורות האופקיות :

#### 6.2.3.1. קורה אופקית עליונה :



תרשים 10 – ד.ג.ח. של קורה אופקית עליונה

נעת, נרשום את משוואות שיווי המשקל עבור קורה אופקית עליונה :

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_{B_x} + \vec{R}_{C_x} + \vec{F}_{D_x} = -F_{B_x} + R_{C_x} - F_{D_x}$$

$$\langle 5 \rangle F_{B_x} + F_{D_x} = R_{C_x}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{F}_{B_y} + \vec{R}_{C_y} + \vec{F}_{D_y} = -F_{B_y} + R_{C_y} - F_{D_y}$$

$$\langle 6 \rangle F_{B_y} + F_{D_y} = R_{C_y}$$

$$\odot \sum \vec{M}_C = 0$$

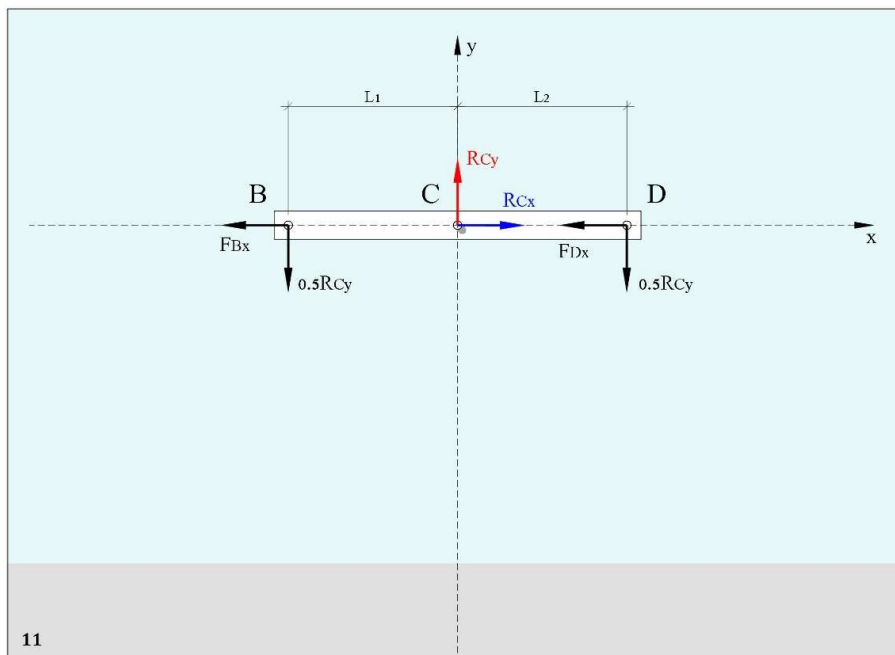
$$\odot \sum \vec{M}_C = \vec{M}_{F_{B_y}} + \vec{M}_{F_{D_y}} = F_{B_y} \cdot L_1 - F_{D_y} \cdot L_2$$

$$F_{B_y} \cdot L_1 = F_{D_y} \cdot L_2$$

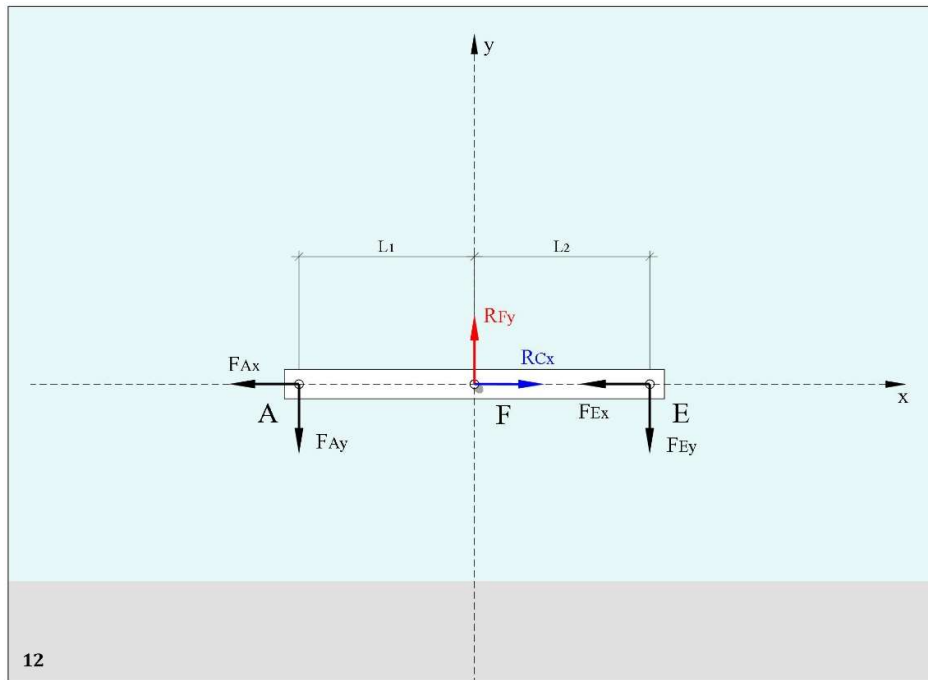
לפי ההנחות ידוע ש :  $L_1 = L_2$  , לכן ניתן לומר ש :  $\langle 7 \rangle F_{B_y} = F_{D_y}$

לכן, על פי הקשרים  $\langle 6 \rangle$  ו-  $\langle 7 \rangle$  נקבל ש :  $\langle 8 \rangle F_{B_y} = F_{D_y} = \frac{1}{2} R_{C_y}$

נתקן את ד.ג.ח. בהתאם למה שמצאנו ב-  $\langle 8 \rangle$  :



תרשים 11 – ד.ג.ח. עדכון כיוון כוחות בצירים B ו D



תרשים 12 – ד.ג.ח. של קורה אופקית תחתונה

בעת, נרשום את משוואות שיווי המשקל עבור קורה אופקית תחתונה :

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_{Ax} + \vec{R}_{Fx} + \vec{F}_{Ex} = -F_{Ax} - R_{Fx} - F_{Ex}$$

$$\langle 9 \rangle F_{Ax} + F_{Ex} = -R_{Fx}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{F}_{Ay} + \vec{R}_{Fy} + \vec{F}_{Ey} = -F_{Ay} + R_{Fy} - F_{Ey}$$

$$\langle 10 \rangle F_{Ay} + F_{Ey} = R_{Fy}$$

$$\odot \sum \vec{M}_F = 0$$

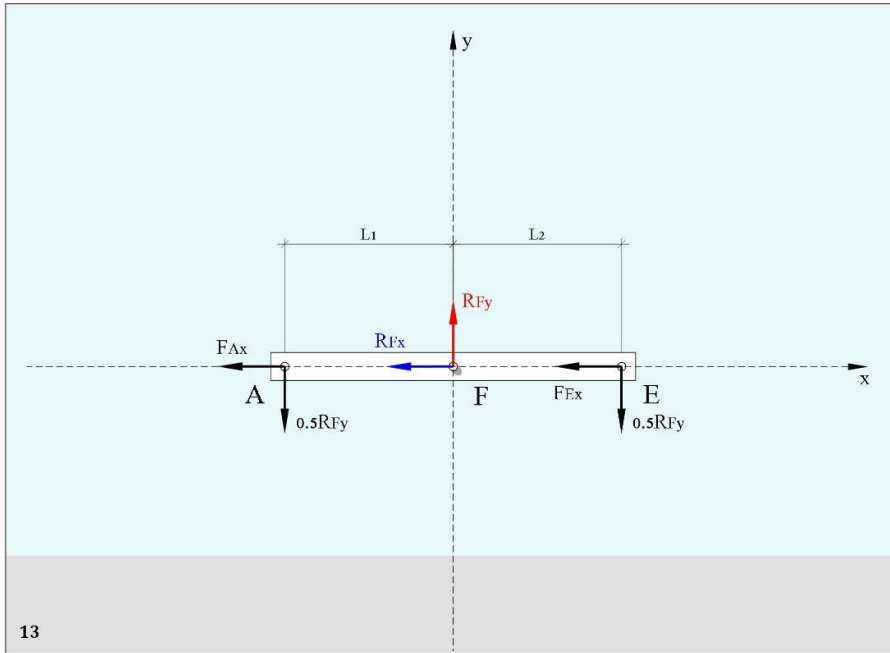
$$\odot \sum \vec{M}_F = \vec{M}_{F_{Ay}} + \vec{M}_{F_{Ey}} = F_{Ay} \cdot L_1 - F_{Ey} \cdot L_2$$

$$F_{Ay} \cdot L_1 = F_{Ey} \cdot L_2$$

לפי ההנחות ידוע ש :  $L_1 = L_2$  , לכן ניתן לומר ש :  $\langle 11 \rangle F_{Ay} = F_{Ey}$

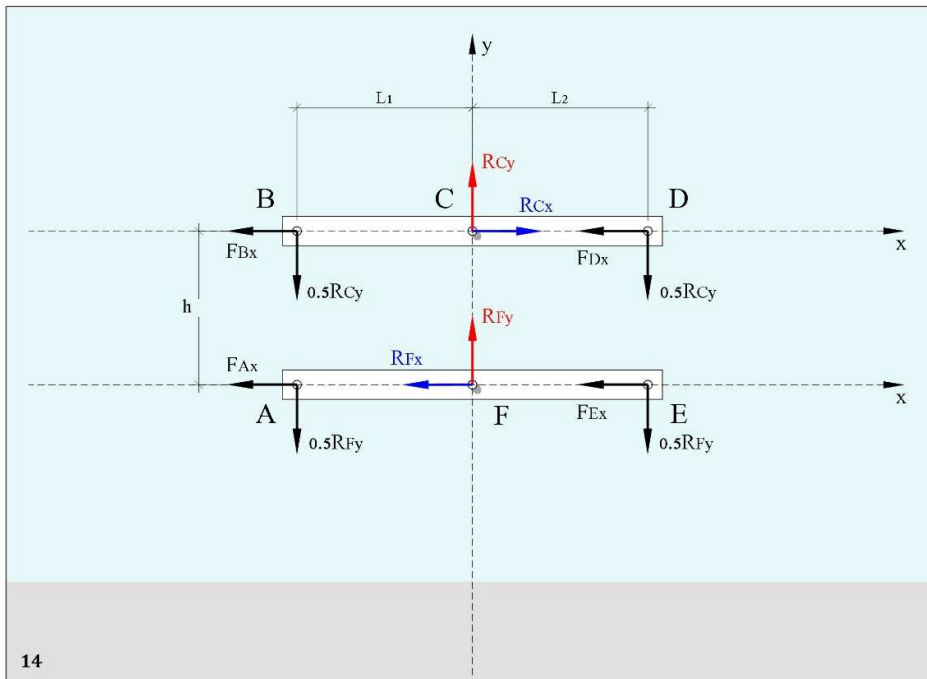
לכן, על פי הקשרים (10) ו-(11) נקבל ש:  $\langle 12 \rangle \quad F_{A,y} = F_{E,y} = \frac{1}{2} R_{F,y}$

נעדכן את ד.ג.ח. בהתאם למה שמצאנו ב- (12):



תרשים 13 – ד.ג.ח. עדכון כוחות בצירים  $E$  ו-  $A$

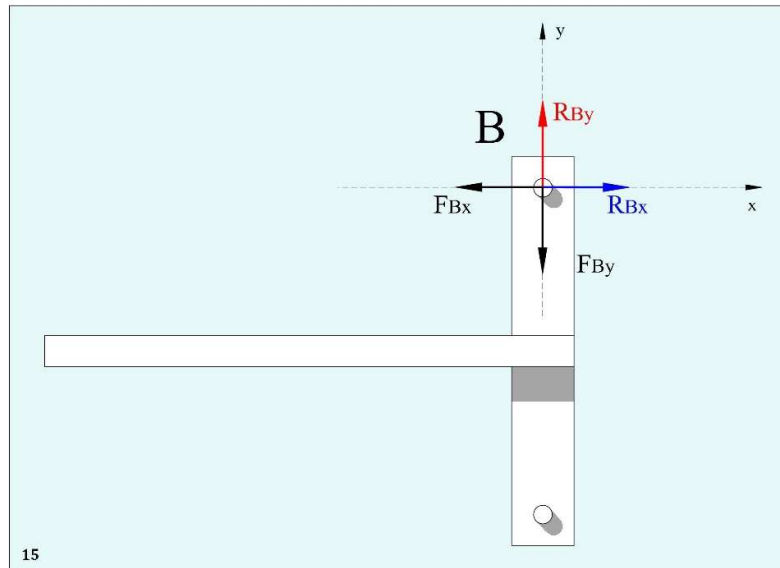
נעדכן את ד.ג.ח. של שתי הקורות האופקיות יחד, בהתאם למה שמצאנו ב- (8) וב- (12):



תרשים 14 – ד.ג.ח. עדכון כוחות בצירים  $E, D, B, A$

#### 6.2.4. נשרטט דיאגרמת גוף חופשי (ד.ג.ח.) של שתי הזרועות :

לפני שנרשום את משוואת שיווי המשקל עבור שתי הזרועות, כדאי להסביר שאם נבצע ד.ג.ח. על כל אחד מהצירים בנפרד נראה שגם שם קיים שיווי משקל וניתן לרשום עבור כל ציר, בנפרד, את משוואות שיווי המשקל. בתרשים הבא נדגים זאת על ציר בודד כלשהו, לצורך ההסבר. באופן עקרוני הסבר זה רלוונטי לכל שאר הצירים. על כל אחד מהצירים פועלים כוחות כתוצאה מהעומס על המבנה כדוגמת  $F_{B_x}$  ו  $F_{B_y}$ . והריאקציות על הצירים בתגובה לכוחות יפעלו על הצירים בכיוון הפוך כדוגמת  $R_{B_x}$  ו  $R_{B_y}$  לפי התרשים הבא :



תרשים 15 – תיאור הכוחות והריאקציות בציר B

היות והציר מסוגל להסתובב ללא חיכוך, אין ביכולתו להעביר מומנט אל האלמנטים המחוברים אליו, ואז משוואות שיווי משקל הרלוונטיות הן :

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_{B_x} + \vec{R}_{B_x} = -F_{B_x} + R_{B_x}$$

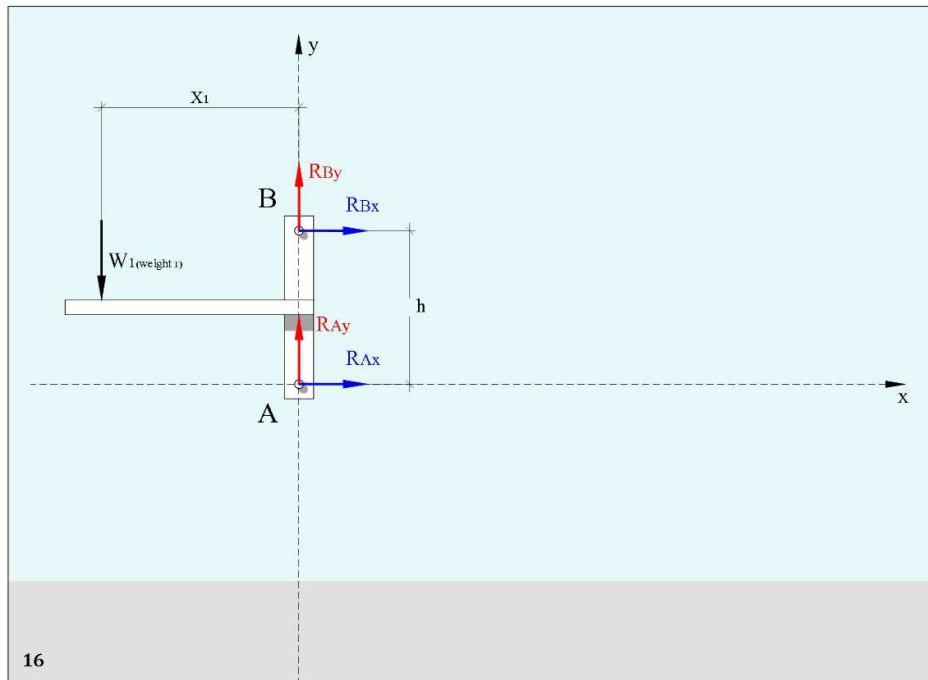
$$\langle 13 \rangle F_{B_x} = R_{B_x}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{F}_{B_y} + \vec{R}_{B_y} = -F_{B_y} + R_{B_y}$$

$$\langle 14 \rangle F_{B_y} = R_{B_y}$$





תרשים 16 – ד.ג.ח. של זרוע שמאלית

בעת, נרשום את משוואות שיווי המשקל עבור זרוע שמאלית :

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_x = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Bx} = R_{Ax} + R_{Bx}$$

$$\langle 15 \rangle R_{Ax} = -R_{Bx}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{W}_1 + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{By} = -W_1 + R_{Ay} + R_{By}$$

$$\langle 16 \rangle R_{Ay} + R_{By} = W_1$$

$$\odot \sum \vec{M}_A = 0$$

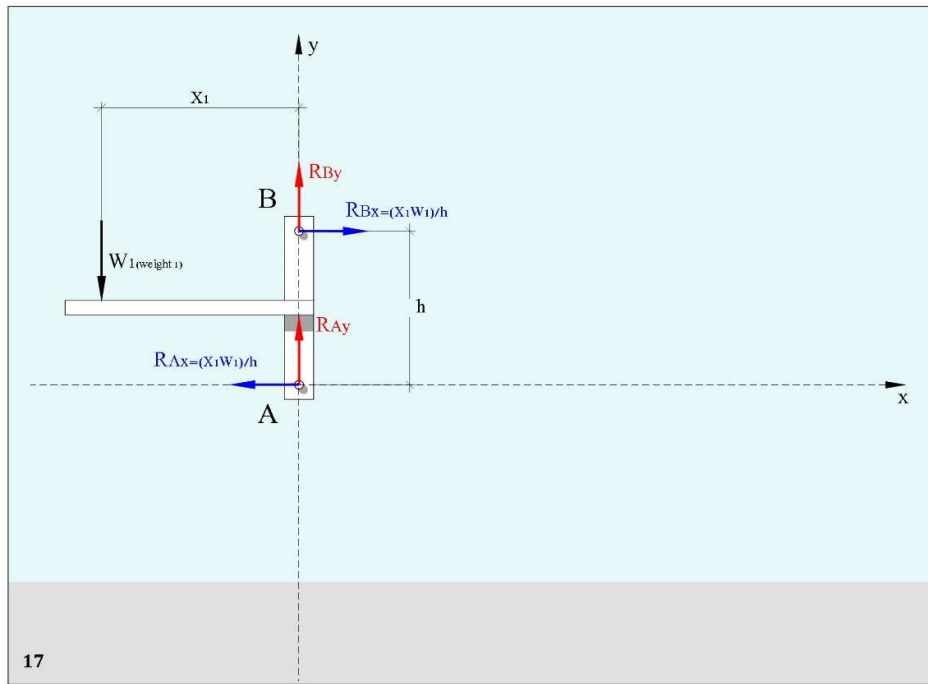
$$\odot \sum \vec{M}_A = \vec{M}_{W_1} + \vec{M}_{R_{Bx}} = W_1 \cdot X_1 - R_{Bx} \cdot h$$

$$R_{Bx} \cdot h = W_1 \cdot X_1$$

$$\langle 17 \rangle R_{Bx} = \frac{X_1}{h} W_1$$

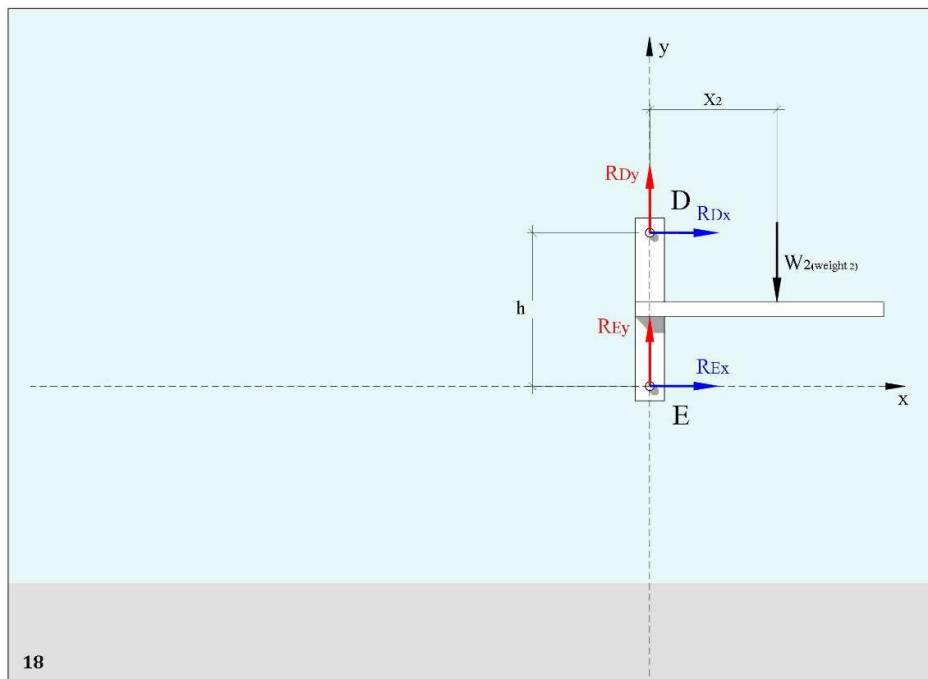
על פי הקשרים (15) ו- (17) נקבל ש: 
$$\langle 18 \rangle \quad R_{Ax} = -\frac{x_1}{h} W_1$$

נתקן את ד.ג.ח. בהתאם למה שמצאנו ב- (17) ו (18):



תרשים 17 – עדכון כוחות בזרוע שמאלית

#### 6.2.4.2. זרוע ימנית:



תרשים 18 – ד.ג.ח. של זרוע ימנית

בעת, נרשום את משוואות שיווי המשקל עבור זרוע ימנית :

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_x = \vec{R}_{D_x} + \vec{R}_{E_x} = R_{D_x} + R_{E_x}$$

$$\langle 19 \rangle R_{D_x} = -R_{E_x}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{W}_2 + \vec{R}_{D_y} + \vec{R}_{E_y} = -W_2 + R_{D_y} + R_{E_y}$$

$$\langle 20 \rangle R_{D_y} + R_{E_y} = W_2$$

$$\odot \sum \vec{M}_E = 0$$

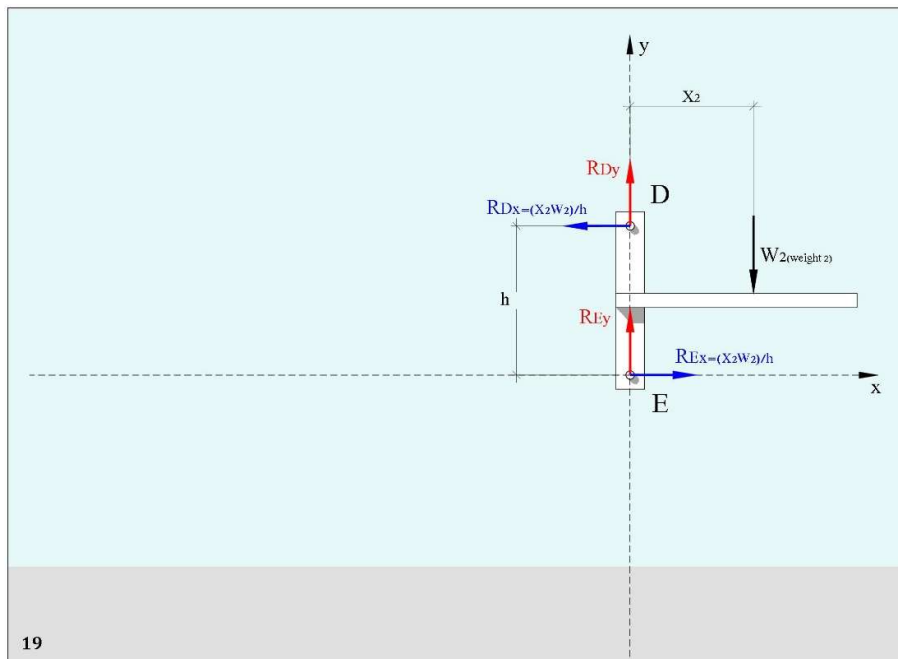
$$\odot \sum \vec{M}_E = \vec{M}_{W_2} + \vec{M}_{R_{D_x}} = -W_2 \cdot X_2 - R_{D_x} \cdot h$$

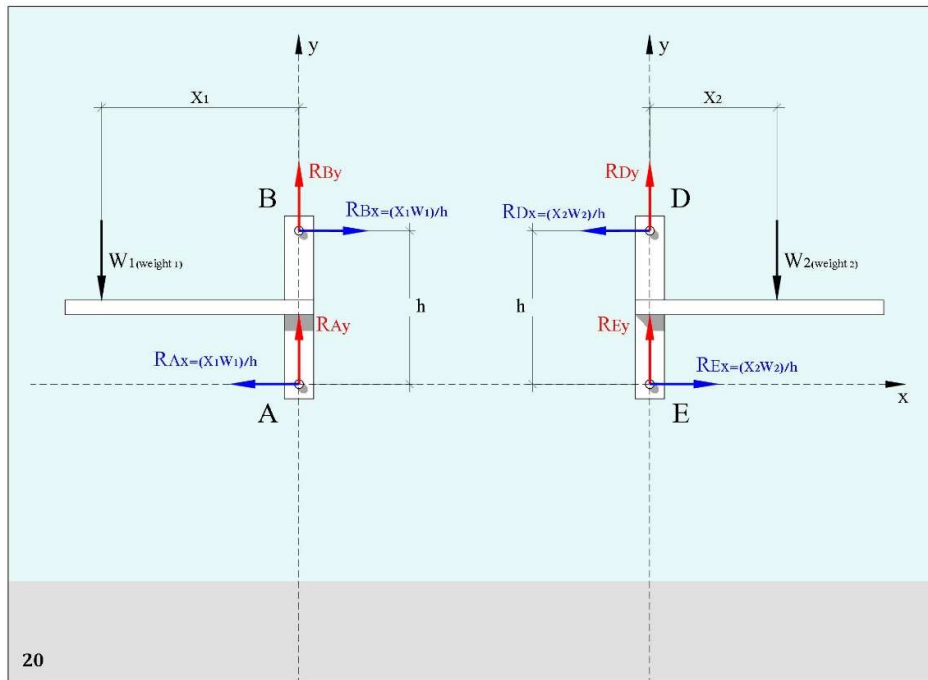
$$R_{D_x} \cdot h = -W_2 \cdot X_2$$

$$\langle 21 \rangle R_{D_x} = -\frac{X_2}{h} W_2$$

על פי הקשרים  $\langle 19 \rangle$  ו-  $\langle 21 \rangle$  נקבל ש :  $\langle 22 \rangle R_{E_x} = \frac{X_2}{h} W_2$

נתקן את ד.ג.ח. בהתאם למה שמצאנו ב-  $\langle 21 \rangle$  ו  $\langle 22 \rangle$  :





תרשים 20 – עדכון כוחות בזרוע ימנית ובשמאלית

### 6.2.5. נמצא כעת כיצד משפיעים המרחקים $X_1$ ו $X_2$ על מצב שיווי משקל של המערכת :

נחזור לקשרים שמצאנו קודם :

$$\langle 4 \rangle W_1 \cdot (X_1 + L_1) - R_{C_x} \cdot h = W_2 \cdot (X_2 + L_2)$$

$$\langle 5 \rangle F_{B_x} + F_{D_x} = R_{C_x}$$

$$\langle 17 \rangle R_{B_x} = \frac{X_1}{h} W_1$$

$$\langle 21 \rangle R_{D_x} = -\frac{X_2}{h} W_2$$



$\langle 5 \rangle + \langle 17 \rangle + \langle 21 \rangle :$

$$\langle 23 \rangle R_{C_x} = \frac{X_1}{h} W_1 - \frac{X_2}{h} W_2$$

$\langle 4 \rangle + \langle 23 \rangle :$

$$W_1 \cdot (X_1 + L_1) - \left( \frac{X_1}{h} W_1 - \frac{X_2}{h} W_2 \right) \cdot h = W_2 \cdot (X_2 + L_2)$$

$$W_1 \cdot (X_1 + L_1) - W_1 \cdot X_1 + W_2 \cdot X_2 = W_2 \cdot (X_2 + L_2)$$

$$W_1 \cdot X_1 + W_1 \cdot L_1 - W_1 \cdot X_1 = W_2 \cdot X_2 + W_2 \cdot L_2 - W_2 \cdot X_2$$

$$\boxed{\langle 24 \rangle W_1 \cdot L_1 = W_2 \cdot L_2}$$

ניתן לראות שכאשר מתקיים השוויון שקיבלנו  $\langle 24 \rangle \quad \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{L}_1 = \mathbf{W}_2 \cdot \mathbf{L}_2$  אז המשמעות היא שסכום המומנטים סביב הציר  $\mathbf{F}$  יהיה שווה ל-0, כלומר-  $\odot \sum \overrightarrow{\mathbf{M}_F} = \mathbf{0}$ , והמערכת תימצא בשיווי משקל.

ניתן לראות שהמרחקים  $\mathbf{X}_1$  ו  $\mathbf{X}_2$  אינם מופיעים בשוויון שמצאנו ולכן אינם משפיעים על מצב שיווי משקל של המערכת - **מ.ש.ל.**

כאשר  $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2$  אזי, השוויון  $\langle 24 \rangle$  תמיד יתקיים היות ו-  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ . וכאשר  $\mathbf{W}_1 \neq \mathbf{W}_2$  וגם  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$  אזי השוויון  $\langle 24 \rangle$  לא מתקיים – והמערכת תמצא בתנועה ולא בשיווי משקל.

### 6.2.6. משמעות הביטוי שמצאנו עבור $R_{C_x}$ :

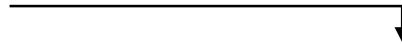
$$\langle 23 \rangle \quad R_{C_x} = \frac{X_1}{h} W_1 - \frac{X_2}{h} W_2$$

$$\langle 2 \rangle \quad R_{C_x} = -R_{F_x}$$

$\langle 2 \rangle + \langle 23 \rangle$  :

$$\langle 25 \rangle \quad R_{F_x} = \frac{X_2}{h} W_2 - \frac{X_1}{h} W_1$$

$$\langle 23 \rangle \quad R_{C_x} = \frac{X_1}{h} W_1 - \frac{X_2}{h} W_2$$



כדי להבין את משמעות הביטוי, נתייחס למצבים האפשריים הבאים :

6.2.6.1. כאשר  $\mathbf{W}_1$  ו  $\mathbf{W}_2$  שווים אזי נוכל לומר ש –

$$\langle 26 \rangle \quad \frac{W_1}{h} = \frac{W_2}{h} = C_{(constant)}$$

$$\langle 23 \rangle + \langle 26 \rangle: \quad R_{C_x} = C(X_1 - X_2)$$

המשמעות היא שכל עוד  $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$  אזי יתקיים ש-  $R_{C_x} \neq 0$ , וכאשר  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$  אזי יתקיים ש-  $R_{C_x} = 0$ . בנוסף לכך, ניתן לראות שהכוחות  $R_{C_x}$  ו  $R_{F_x}$  תמיד מנוגדים בכיוונם : כך שאם  $\mathbf{X}_1 > \mathbf{X}_2$  אזי  $R_{C_x} > 0$  וגם  $R_{F_x} < 0$ , ולהפך, אם  $\mathbf{X}_1 < \mathbf{X}_2$  אזי  $R_{C_x} < 0$  וגם  $R_{F_x} > 0$ .

המסקנה היא ש-  $\mathbf{X}_1$  ו  $\mathbf{X}_2$  משפיעים על ערכם וכיוונם של הכוחות  $R_{C_x}$  ו  $R_{F_x}$ .